

Cevap Anahtarı

Modül Teorisi Dersi Vize Soruları

12.04.2019

- 1-) Aşağıdaki kavramları açıklayınız.
Modül, Modül homomorfizması, M Modülünün sıfırlayıcısı, Modül homomorfizmasının çekirdeği
- 2-) M bir R -Modül ve $a \in M$ olsun.
 $T = \{ra + na \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi M - R -Modülünün altmodülü müdür?
- 3- R bir halka ve $f: M \rightarrow N$ bir R -Modül homomorfizması olsun. $M / \ker f \cong f(M)$ olduğunu gösteriniz.

- 4- a) R bir halka ve M bir R -Modül olsun.
 $\forall m \in M$ için $(-1_R)m = -m$ dir gösteriniz.
- b) R bir halka M bir R -Modül N bir alt modül ve $\emptyset \neq X' \subseteq M$ olsun.
 $(N: X') = \{r \in R \mid rX' \subseteq N\}$ kümesi R 'nin bir ideali midir?

Başarılar

...

1- Tanımlar defterlerinizde var.

2- $a \in M$ için $a = 0_M$ alınırsa $r \cdot 0_M + n \cdot 0_M = 0_M$ olup $0_M \in T \Rightarrow T \neq \emptyset$

$\forall x, y \in T$ için $x = ra + na, y = r'a + n'a$, olacak şekilde $r, r' \in R, n, n' \in \mathbb{Z}$ var.

$$x - y = (ra + na) - (r'a + n'a) = ra + na - r'a - n'a$$

$$= ra - r'a + na - n'a = (r - r')a + (n - n')a \in T \text{ bulunur.}$$

$\forall x \in T$ ve $\forall r' \in R$ için $r'x = r'(ra + na) = r'(ra) + r'(na)$
 $= (r'r)a + r'(na) = (r'r)a + (r'a + \dots + r'a) = (r'r)a + n(r'a)$
 $= r(r'a) + n(r'a) = r(r'a) + n(r'a) \in T$
bulunur.

3- Definerizide Teorem olarak ver.

4. a) $\forall m \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}0_M &= (0_R) \cdot m = (1_R + (-1_R))m \\ &= 1_R m + (-1_R)m \\ &= m + (-1_R)m \\ -m &= (-1_R)m\end{aligned}$$

b) $(N: X) = \{r \in \mathbb{R} \mid rX \subseteq N\}$

$0_R \cdot X = 0_M \in N$ olduğundan $(N: X) \neq \emptyset$

* $\forall r, s \in (N: X) \Rightarrow \forall x \in X$ için $(r-s)x = rx - sx \in N$ olduğundan $r-s \in (N: X)$

** $\forall r \in (N: X)$ ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$(ar)X = a(rX) \subseteq N$ olduğundan $ar \in (N: X)$ olur.